

Dans cette séance on va voir

- (i) la formule de Cramer;
- (ii) le lien entre déterminant et aire/volume;
- (iii) la définition de base d'un espace vectoriel $\rightarrow$ coordonnées d'un vecteur;
- (iv) la notion de dimension d'un espace vectoriel;

} déterminants

∇ Pour $A \in M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \begin{cases} A^T = A \text{ ; on dit que } A \text{ est symétrique} \\ A^T = -A \text{ ; on dit que } A \text{ est antisymétrique} \end{cases}$ } notions vues dernière fois

§ 9.5. Formule de Cramer

Définition 9.26 | Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ (vecteur colonne) on définit la matrice $A_j(\bar{b}) \in M_n(\mathbb{R})$ obtenue de A en remplaçant la j -ème colonne par $\bar{b}$.

Exemple 9.27 | Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ e \end{pmatrix}$ et $j=2$, on a

$$A_2(\bar{b}) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ 4 & \pi & 6 \\ 7 & e & 9 \end{pmatrix}$$

Proposition 12 | (Formule de Cramer) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ et soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ l'unique solution de $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ (i.e. $\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$).

Alors

$\xrightarrow{\text{j-ème coordonnée de } \bar{x}} x_j = \frac{\det(A_j(\bar{b}))}{\det(A)}, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$

$\xrightarrow{\text{1ère colonne}} \quad \quad \quad \xrightarrow{\text{dernière colonne}}$

(Preuve) On écrit $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$. Alors

$$A \cdot (\mathbb{I}_n)_j(\bar{x}) = A \cdot [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_{j-1} \bar{x} \bar{e}_{j+1} \dots \bar{e}_n] = [A \cdot \bar{e}_1 \dots A \cdot \bar{e}_{j-1} \underbrace{A \cdot \bar{x}}_{\text{j-ème colonne}} A \cdot \bar{e}_{j+1} \dots A \cdot \bar{e}_n] = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} \bar{b} \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_n] = A_j(\bar{b})$$

$= [\bar{e}_1 \bar{e}_{j-1} \bar{x} \bar{e}_{j+1} \bar{e}_n]$

ce qui nous dit que

(*) $\det(A) \cdot \det((\mathbb{I}_n)_j(\bar{x})) = \det(A_j(\bar{b}))$

$\xrightarrow{\text{1ère colonne}} \quad \xrightarrow{\text{(j-1)-ème colonne}} \quad \xrightarrow{\text{(j+1)-ème colonne}} \quad \xrightarrow{\text{n-ème colonne}}$

Or, si l'on calcule $\det((I_n)_j(\bar{x}))$ en développant la j -ème colonne:

$$\det((I_n)_j(\bar{x})) = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} x_k \cdot \det((I_n)_j(\bar{x})[k|j]) = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} x_k \det(I_n[k|j])$$

$= I_n[k|j] \quad \nabla$

Si $k \neq j$, $I_n[k|j]$ contient une colonne et une ligne de zéros, ce qui implique que $\det(I_n[k|j]) = 0$. Si $k = j$, $I_n[k|j] = I_{n-1}$, ce qui implique que $\det(I_n[j|j]) = 1$.
En conséquence, $\det((I_n)_j(\bar{x})) = (-1)^{j+j} x_j \cdot 1 = x_j$ et (*) nous dit

$$x_j = \frac{\det(\Delta_j(b))}{\det(A)}$$

□

Exemple 9.28* Pour le SEL

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A \quad \underbrace{\hspace{10em}}_b$

Alors $\det(A) = 24 \neq 0 \Rightarrow A$ inversible. La Proposition 12 nous dit par exemple que

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \boxed{5} & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{24} = 8$$

Formule de Cramer par A^{-1}

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit la matrice complémentaire de A
 ${}^t\text{com } A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $({}^t\text{com } A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A[j|i])$

Thm. 9.29 Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a que

$$A \cdot {}^t\text{com } A = {}^t\text{com } A \cdot A = \det(A) \cdot I_n \xrightarrow[\text{inversible}]{\text{si } A \text{ est}} A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot {}^t\text{com } A$$

(Preuve) On montrera $A \cdot {}^t\text{com } A = \det(A) \cdot I_n$. L'autre identité est analogue.
Or $\downarrow$ det. du produit

$$(A \cdot {}^t\text{com } A)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} ({}^t\text{com } A)_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{j+k} \det(A[k|j])$$

Si $i=k$:

$$(A \cdot {}^t\text{com } A)_{ii} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A[i|j]) \xrightarrow{\text{Thm. 9.6 (dév. selon } i\text{-ème ligne de } A)} \det(A) = \det(A) \cdot (I_n)_{ii}$$

Si $i \neq k$:

$$(A, {}^t \text{com } A)_{i,k} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{ij} \det(A[k|j]) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{-ème} \\ \text{ligne} \\ \leftarrow k\text{-ème} \\ \text{ligne} \end{matrix} = 0 \quad \boxed{32}$$

Thm. 9.6
(dév. selon la
k-ème ligne)

(ALT)
pour det

$$= \det(A) \cdot (\mathbf{I}_n)_{i,k}$$

$\underbrace{(\mathbf{I}_n)_{i,k}}_{=0 \forall}$

Ce qui montre que $A \cdot {}^t \text{com } A = \det(A) \cdot \mathbf{I}_n$. La formule pour A inversible est directe, vu que dans ce cas $\det(A) \neq 0$, et donc $A \cdot (\det(A)^{-1} {}^t \text{com } A) = \mathbf{I}_n$. $\square$

§ 9.6. Interprétation géométrique du déterminant

Thm 9.31 Soient $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires. Alors

Aire du parallélogramme
défini par $\bar{v}$ et $\bar{w}$

$$= |\det(\bar{v}, \bar{w})| = |v_1 w_2 - v_2 w_1| \quad \leftarrow \begin{cases} \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si $\bar{v}, \bar{w}$ colinéaires, on garde cette égalité en définissant l'aire = 0 !

(Preuve) Voir Exercice 9 de la série 6. $\leftarrow$ la preuve est dans le corrigé.

Thm 9.32 Pour $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$, on a que

$$\text{Volume du parallélépipède} = |\det(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})|$$

défini par $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$
 $\{s\bar{u} + t\bar{v} + r\bar{w} : s, t, r \in [0, 1]\}$

(Preuve) O mise $\square$

Suite du Chapitre 4

nouvelle version !

§ 4.5. Bases

cela inclut le cas d'un (voir Ex. 9)
sous-espace vectoriel (de la série 3)

Définition 4.28 Soit V un espace vectoriel. Une base de V est une partie $B \subseteq V$ qui est libre et engendre V .

$\leftarrow$ en général, on fixe un ordre des éléments de $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ et on parle de base ordonnée

Proposition (p. 56) Soit $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base (ordonnée) d'un E.V. V . Alors, pour chaque $v \in V$ il existe des uniques $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$. En particulier, si $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_p v_p$, alors $\alpha_1 = \alpha'_1, \dots, \alpha_p = \alpha'_p$.

(Preuve) Comme B engendre V , alors par définition V : il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$. On montre l'unicité : si $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = v = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_p v_p$, alors

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) v_1 + \dots + (\alpha_p - \alpha'_p) v_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha'_1 = 0, \dots, \alpha_p - \alpha'_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha'_1, \dots, \alpha_p = \alpha'_p. \square$$

$\mathbb{B}$ libre

Définition 4.29 | Soit $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base (ordonnée) d'un E.V. V .

Étant donné $v \in V$, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ les uniques scalaires tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$ (d'après la proposition précédente). On appelle $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les coordonnées (ou composantes) de v relatives à la base B . On écrit

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \leftarrow \text{vecteur de coordonnées (ou composantes) de } v \text{ relatives à la base } B.$$

Exemple 4.32 | Pour $V = \mathbb{R}^n$, on pose $B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Alors B_{can} est une base, appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, $[v]_{B_{\text{can}}} = v$ ∇

Exemple 4.33 | Pour $V = \mathbb{R}^2$, on pose $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Alors,

B est une base de $\mathbb{R}^2$:

• B est libre :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - 7\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{cases} -13\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \checkmark$$

• B est partie génératrice de $\mathbb{R}^2$:

$\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, on veut montrer qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

i.e. que le SEL $\begin{cases} 2\alpha_1 - 7\alpha_2 = \beta_1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = \beta_2 \end{cases}$ est compatible. Or, si on fait $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ on trouve le

$$\text{SEL équivalent } \begin{cases} -13\alpha_2 = \beta_1 - 2\beta_2 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = \beta_2 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{1}{13}L_1} \begin{cases} \alpha_2 = \frac{2\beta_2 - \beta_1}{13} \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = \beta_2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} \alpha_2 = \frac{2\beta_2 - \beta_1}{13} \\ \alpha_1 = \frac{3\beta_1 + 7\beta_2}{13} \end{cases} \quad \checkmark$$

En plus

$$\left[\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} \frac{3\beta_1 + 7\beta_2}{13} \\ \frac{2\beta_2 - \beta_1}{13} \end{pmatrix} \quad \text{pour tous } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.34 Pour $V = \mathbb{P}_n$, la famille $\mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ est une base, appelée base canonique de $\mathbb{P}_n$. Dans ce cas

$$\underbrace{[a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n]}_{\in \mathbb{P}_n} \mathcal{B}_{\text{can}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Lien entre bases et applications linéaires

Thm 4.46 Soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire et soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$.

- (i) Si T est injective et $\mathcal{B}$ est libre, alors $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_p)\} \subseteq W$ est libre.
- (ii) Si T est surjective et $\mathcal{B}$ engendre V , alors $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_p)\} \subseteq W$ engendre W .

En conséquence, si T est bijective et $\mathcal{B}$ est base de V , alors $T(\mathcal{B})$ est base de W .
Réciproquement, si $T(\mathcal{B})$ est base de W pour une base $\mathcal{B}$ de V , alors T est bijective.

(Preuve) Pour (i), on note que si $\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) = 0_W$ pour $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, alors $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) = 0_W$ par linéarité de T . Comme T est injective, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 \Rightarrow T(\mathcal{B})$ libre ✓

Pour (ii), on note que, étant donné $w \in W$, comme T est surjective, il existe $v \in V$ tel que $T(v) = w$. Or, comme $\mathcal{B}$ engendre V , il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$. Alors $w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) \Rightarrow w \in \text{Vect}\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$ pour tout $w \in W$, ce qui nous dit que $T(\mathcal{B})$ engendre W .

Les items (i) et (ii) nous disent que T bijective + $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow T(\mathcal{B})$ base. Pour montrer que, si $T(\mathcal{B})$ est base de W pour $\mathcal{B}$ base de V , alors T est bijective, on procède de la façon suivante. Comme $T(\mathcal{B})$ base de W , $\forall w \in W$ il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $w = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) \Rightarrow T$ surjective (car $\forall w \in W, \exists v \in V$ tq $T(v) = w$). On voit finalement que si $\overset{T \text{ lin}}{T(v)} = 0_W$ pour $v \in V$, on écrit $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$, car $\mathcal{B}$ est base $0_W = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 \Rightarrow v = 0_V$ i.e. T est injective. $\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$ base de W □

Exemple I Soit V un E.V et $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base de V . Alors l'application $T_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

est linéaire et bijective. $\leftarrow T_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ can ∇

4.7. Dimension

Lemme 10 Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base d'un E.V. V . Si $\mathcal{J} \subseteq V$ est une famille avec au moins $p+1$ éléments, alors $\mathcal{J}$ est liée.

(Preuve) Soit $T_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^p$ l'application linéaire bijective d'exemple précédent. Il suffit de montrer que $T_{\mathcal{B}}(\mathcal{J})$ est liée par le Thm 4.46 (ii). Or, comme $\#(T_{\mathcal{B}}(\mathcal{J})) = \#(\mathcal{J}) > p$, le Thm 3.9 nous dit que $T_{\mathcal{B}}(\mathcal{J})$ est liée, ce qui implique, par le Thm 4.46 (ii), que $\mathcal{J} = T_{\mathcal{B}}^{-1}(T_{\mathcal{B}}(\mathcal{J}))$ est aussi liée. $\square$

Corollaire 2 Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ et $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_q\}$ sont deux bases d'un E.V. V , alors $p = q$.

(Preuve) Si $q > p$, alors $\mathcal{B}'$ serait liée $\Rightarrow q \leq p$, car $\mathcal{B}'$ est libre. Si $p > q$, alors $\mathcal{B}$ serait liée $\Rightarrow p \leq q$, car $\mathcal{B}$ est libre. $\square$

Définition 4.47 Si un espace vectoriel V possède une base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ de cardinalité p , on définit la dimension de V via $\dim(V) = p$. Par le Corollaire précédent, ce nombre est bien défini. ∇

Exemple 4.32 (suite) $\dim \mathbb{R}^n = n$

Exemple 4.34 (suite) $\dim \mathbb{P}_n = n+1$

Exercice $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel (voir Déf. C, feuille 19)
Quelle est $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R})$?

Exemple | (semblable aux exercices 7, 9 de la série 7) Méthode de calcul de base de $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$? 34

Soit $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'app. lin. associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
on écrit parfois $\text{Ker}(A)$ *on écrit parfois $\text{Im}(A)$*

Calculer une base de $\text{Ker}(T_A)$ et de $\text{Im}(T_A)$. i.e. $A = [T_A]$?

voir Exemple résolu en cours feuille 21

Ker(T_A) $T_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ (SEL)

On calcule alors la FER de A :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A FER de A A' FER de A

$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 5/4 x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} x_1 = 5x_3/4 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}$

Var. libre x_3

Alors $\text{Ker}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 5x_3/4 \\ \text{et} \\ x_2 = -3x_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5x_3/4 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Nouveau $\downarrow$

Im(T_A) Idee : $T: V \rightarrow W$ | B_V base de $V \Rightarrow T(B_V)$ famille gén. de $\text{Im}(T)$ | Base de T_A ?

Il y a toujours une base $B' \subseteq T(B_V)$ (essayer ?) ③

Pour ① on choisit B_{can} de $\mathbb{R}^3$:

$B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow T_A(B_{\text{can}}) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ ← famille génératrice de $\text{Im}(T_A)$?

Pour ③ il faut voir quel vecteur on peut éliminer : colonnes de $[T_A] = A$

En général faut essayer mais pour matrices : Règle Choisir B' formé par les colonnes de $T(B_{\text{can}})$ dont la FER contient un pivot

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ←